Epreuves sur dossiers du CAPES externe de mathématiques, 3e concours 2019

Thème : probabilités

L'exercice

À Florence au début du XVIIe siècle, un jeu consistait à jeter trois dés et à miser sur le résultat de la somme des trois dés. Durant sa jeunesse Cosme II de Médicis, grand-duc de Toscane, a observé de nombreuses parties : il a remarqué qu'il était préférable de miser sur le nombre 10.
Un de ses fidèles disciples lui affirma : « Maître excusez-moi de vous contredire mais le 9 apparaît plus souvent que le 10 ». Lequel des deux a raison ?

Les productions de deux élèves de seconde

Élève 1

J'ai réalisé une feuille de tableur et j'ai tenté de modéliser la situation. Je remarque que le 10 apparaît plus souvent même si parfois c'est le 9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Somme			
2	2	1	6	9		Apparition du 9	Apparition du 10
3	4	4	2	10		22	18
4	2	2	6	10			
5	4	6	6	16		Testé avec 200 essais	
6	1	5	5	11			
7	6	5	3	14			

Élève 2

J'ai compté les différentes façons d'obtenir 9 avec 3 dés. Il y en a 6. Puis j'ai fait le même raisonnement avec 10 il y en a 6 différentes également. J'en déduis que la probabilité de voir apparaître 9 sur la somme des dés est la même que celle de voir apparaître 10.

Donc aucun des deux n'a raison.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *probabilités*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « modéliser ».

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 4n - 6$ pour tout entier naturel n.
Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, et démontrer cette conjecture.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai utilisé le tableur pour calculer de u_0 jusqu'à u_{10}.
Je vois que le diagramme obtenu correspond à une parabole. En considérant le sommet de la parabole, je vois que $\alpha = 2$ et $\beta = -3$, donc je fais l'hypothèse que $u_n = (n-2)^2 - 3$.
J'ai essayé de le prouver par récurrence mais je n'arrive pas à prouver l'hérédité et je ne sais pas pourquoi ça ne marche pas.

Élève 2

D'après l'énoncé on peut écrire que $u_{n+1} - u_n = 4n - 6$.
Donc la suite $u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique de raison 4.
Donc si on ajoute les termes de la suite on obtient $u_{n+1} - u_0 = (n+1)\dfrac{-6+4n-6}{2} = 2n^2 - 4n - 6$.
Je peux en déduire que $u_n = 5 + 2(n+1)^2 - 4(n+1) - 6 = 2n^2 - 3$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de développer la compétence « modéliser ».

Thème : géométrie plane

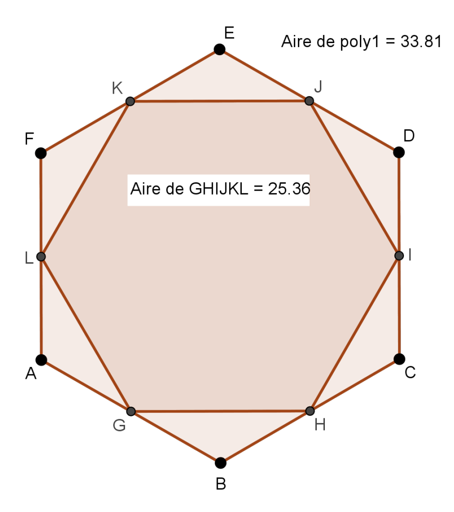
L'exercice

$ABCDEF$ est un hexagone régulier d'aire 230 cm^2. Les points G, H, I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$,… et $[FA]$. Déterminer l'aire du polygone $GHIJKL$.

Les productions de deux élèves de troisième

Élève 1

À l'aide de GeoGebra, j'ai construit l'hexagone régulier $ABCDEF$ en choisissant une longueur de côté quelconque. J'ai ensuite placé les milieux G, H, I, J, K et L des segments $[AB]$, $[BC]$,… et $[FA]$.



J'ai ensuite demandé au logiciel l'aire des deux polygones. L'aire de $ABCDEF$ est égale à 33,81 cm^2 et l'aire de $GHIJKL$ est égale à 25,36 cm^2.

$$\frac{33,81}{25,36} \approx 1,33.$$

Donc en revenant aux hexagones de l'énoncé, si $ABCDEF$ a pour aire 230 cm^2, alors on peut déterminer l'aire de $GHIJKL$ par le calcul :

$$230 \div 1,33 \approx 172,93.$$

L'aire du polygone $GHIJKL$ est à peu près égale à 172,93 cm^2.

Élève 2

Le grand hexagone est un agrandissement du petit hexagone.
J'ai essayé de calculer le rapport entre les côtés du petit et du grand mais je n'y arrive pas.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les réponses de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège, sur le thème *géométrie plane* permettant notamment de développer la compétence « chercher ».

Thème : problèmes conduisant à la résolution d'équations

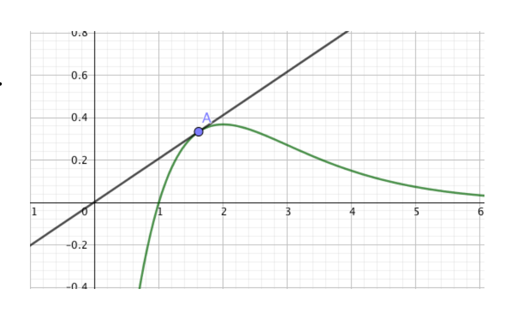
L'exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans ce repère. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes passant par l'origine O du repère ?

Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai tracé la courbe avec GeoGebra.
J'ai trouvé une tangente qui passe par l'origine du repère.
Son équation est $y = 0,2x$.
Donc la réponse est oui.



Élève 2

Équation de la tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
J'ai calculé $f(0) = -\mathrm{e}$ *et* $f'(0) = 2\mathrm{e}$, *ce qui donne* $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$.
Cette droite ne passe pas par l'origine du repère donc la réponse est non.

Élève 3

$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$ *donc* $f'(x) = (1) \times (-\mathrm{e}^{1-x})$.
L' équation $y = mx + p$ *de la tangente est :* $y = -\mathrm{e}^{1-a}(x-a) + (a-1)\mathrm{e}^{1-a}$.
$p = 0 \iff a\mathrm{e}^{1-a} + (a-1)\mathrm{e}^{1-a} = 0 \iff a = 0,5$.
Il y a une seule tangente qui passe par O.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les démarches de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites, leurs éventuelles erreurs et l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *problèmes conduisant à la résolution d'équations* dont l'un au moins nécessitera une prise d'initiative.

Thème : arithmétique

L'exercice

On dispose de billets de 5 € et de billets de 20 €.
De combien de façons peut-on obtenir la somme de 165 € ?

Les productions de trois élèves de terminale S spécialité mathématiques

Élève 1

Soit x *le nombre de billets de 5 € et* y *celui de billets de 20 €. On a* $5x + 20y = 165$.
Comme x *et* y *sont des entiers positifs, on a* $20y \leq 165$ *donc* y *est compris entre 0 et 8.*
Il y a donc 8 façons d'obtenir 165 €.

Élève 2

J'ai utilisé un tableur pour trouver les nombres de billets de 5 € et 20 €.

G12

	A	B	C	D	E
1	y	20y	reste	x	
2	1	20	145	29	
3	2	40	125	25	
4	3	60	105	21	
5	4	80	85	17	
6	5	100	65	13	
7	6	120	45	9	
8	7	140	25	5	
9	8	160	5	1	

Élève 3

J'appelle x *le nombre de billets de 5 € et* y *le nombre de billets de 20 €.*
Je dois donc résoudre $5x + 20y = 165$. *C'est une droite, il y a une infinité de solutions.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *arithmétique*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un d'entre eux permettra notamment de travailler la compétence « communiquer ».